Épreuve spécifique de Mathématiques

Classements SUP (MPSI, PCSI, PTSI) et SPE (MPSI, PCSI, PTSI)

Mercredi 22 Mai 1996 de 14 h 00 à 17 h 00

PROBLEME I

Soit (u_n) une suite de réels non nuls, on lui associe la suite (p_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ p_n = \prod_{p=1}^{n} u_p = u_1 u_2 \ldots\ldots u_n$$

On dit que le produit (p_n) converge si et seulement si la suite (p_n) admet une limite finie non nulle. Sinon on dit que le produit (p_n) diverge.

PREMIERE PARTIE

I - 1 En considérant le quotient $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ montrer que, pour que le produit (p_n) converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 1.

I - 2 Soit $p_n = \prod_{p=1}^{n} (1+\frac{1}{p})$

Montrer que : $\forall n \geq 1,\ p_n = n+1$. Quelle est la nature du produit (p_n) ?

I - 3 Soient un réel a différent de $k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ et $p_n = \prod_{p=1}^{n} \cos\frac{a}{2^p}$.

Pour tout entier naturel n non nul, calculer $p_n \sin\frac{a}{2^n}$ en déduire que le produit (p_n) converge et donner la limite de la suite (p_n) .

DEUXIEME PARTIE

II - 1 Soit (p_n) un produit associé à une suite (u_n) qui converge vers 1.

II - 1a Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que : $\forall n \geq n_0,\ u_n > 0$.

II - 1b On pose $S_n = \sum_{p=n_0}^{n} \ln(u_p)$.

Montrer que la convergence de la suite (S_n) équivaut à la convergence du produit (p_n) .

Lorsque (S_n) converge vers ℓ donner la limite de la suite (p_n) en fonction de ℓ .

II - 2 Soit $p_n = \prod_{p=1}^{n} \sqrt[p]{p}$ et soit $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p}$.

II - 2a Montrer que : $\forall p \geq 3,\ \int_p^{p+1} \frac{\ln x}{x}\,dx \leq \frac{\ln p}{p}$.

II - 2b En déduire la nature de la suite (S_n) et du produit (p_n) .

TROISIEME PARTIE

III - 1 Soit $p_n = \prod_{p=1}^{n}(1+v_p)$ où (v_n) est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

On pose $S'_n = \sum_{p=1}^{n} v_p$.

III - 1a Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(1+x) < x$.

III - 1b Montrer que la suite (S'_n) est croissante.

III - 1c Montrer que si la suite (S'_n) converge, alors le produit (p_n) converge.

III - 2 Déduire de la question I - 2 la limite de la suite (S'_n) définie par $S'_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

III - 3 Soit $p_n = \prod_{p=1}^{n}(1+a^{2^p})$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

III - 3a Que dire de la nature du produit (p_n) lorsque $a \geq 1$?

III - 3b On suppose $a \in]0,1[$

III -3bi Montrer que le produit (p_n) converge.

III - 3bii Pour tout entier naturel n non nul, calculer $(1-a^2)p_n$ et en déduire la limite de la suite (p_n) .

PROBLEME II

Soit E un K espace vectoriel (K = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et u un endomorphisme de E.
On désigne par Ker u le noyau de u et Im u l'image de u.

Pour tout entier k strictement positif u^k désigne l'endomorphisme $u \circ u \circ u \circ \ldots \circ u$ (k fois) et u^0 désigne l'application identique de E.

PREMIERE PARTIE

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est B = (e_1, e_2, e_3, e_4) .
Soit u l'endomorphisme de E tel que la matrice de u par rapport à cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

IA - 1 Déterminer le rang de u et donner une base de Im u, une base de Ker u en fonction des vecteurs de la base B.

IA - 2 Calculer M^2, M^3 et montrer que pour tout entier $p \geq 2$, il existe un réel α_p et une matrice A telle que : $M^p = \alpha_p A$. Expliciter alors M^p.

IA - 3a Donner une base, en fonction des vecteurs de la base B, de chacun des sous-espaces vectoriels suivants: Im u^2, Ker u^2, Im u^3, Ker u^3.

IA - 3b Déterminer : $\forall k \geq 2$, Ker u^k, Im u^k.

IA - 3c Montrer que $E = \text{Ker } u^2 \oplus \text{Im } u^2$.

IB. Soit K[X] l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans le corps K et d l'endomorphisme de K[X] qui à un polynôme P associe son polynôme dérivé P'.

IB - 1 d est il injectif ? d est il surjectif ? Comment peut on en déduire que K[X] n'est pas de dimension finie ?

IB - 2 Déterminer : $\forall q \in \mathbb{N}^*$, Ker d^q.

DEUXIEME PARTIE

Soit u un endomorphisme de E, pour tout entier naturel p, on notera $I_p = \text{Im } u^p$ et $K_p = \text{Ker } u^p$

II - 1 Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, K_p \subset K_{p+1}$ *et* $I_{p+1} \subset I_p$.

II - 2 On suppose que E est de dimension finie et u injectif.
Déterminer : $\forall p \in \mathbb{N}$, I_p et K_p.

II - 3 On suppose que E est de dimension finie n non nulle et u non injectif.

II - 3a Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leq n$ tel que : $K_r = K_{r+1}$.

II - 3b Montrer qu'alors : $I_r = I_{r+1}$ et que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $K_r = K_{r+p}$ et $I_r = I_{r+p}$.

II - 3c Montrer que : $E = K_r \oplus I_r$.

II - 4 Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel r tel que $K_r = K_{r+1}$?